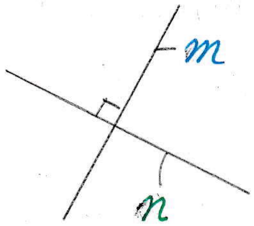
(1) 直線lの方程式を求めよ。

＜解説・解答＞

lは「Cの点P$(p,\ ap^2)$における接線と直交」する。

直交する2直線の傾き



直交する2直線の傾きをm, nとする

$m \cdot n = -1$

接線の傾きを求める。

$f(x) = ax^2$

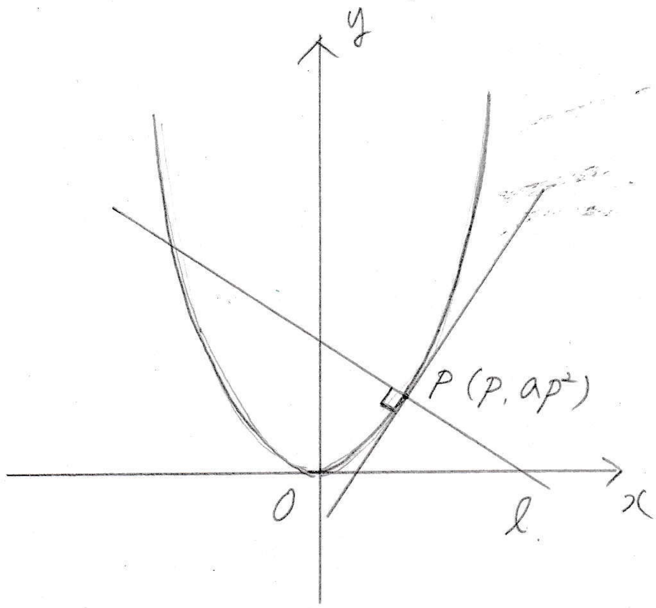
$f'(x) = 2ax$

$f'(p) = 2ap$ ← 接線の傾き

lの傾きをlとする。

$l \times 2ap = -1$ より

$l = -\dfrac{1}{2ap}$ ←傾き



$$y - ap^2 = -\frac{1}{2ap}(x - p)$$

$$y = -\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2$$

［答］$y = -\dfrac{1}{2ap}x + \dfrac{1}{2a} + ap^2$

(2) ℓ と C の交点のうち、P でない方を $Q(q, aq^2)$ とする。q を a, p を用いて表せ。

<解説・解答>

ポイント！

p, q は、

Ⓐ $y = ax^2$

Ⓑ $y = -\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2$

の交点の x 座標である。

⇓

このことを利用し、p と q を求めよう。

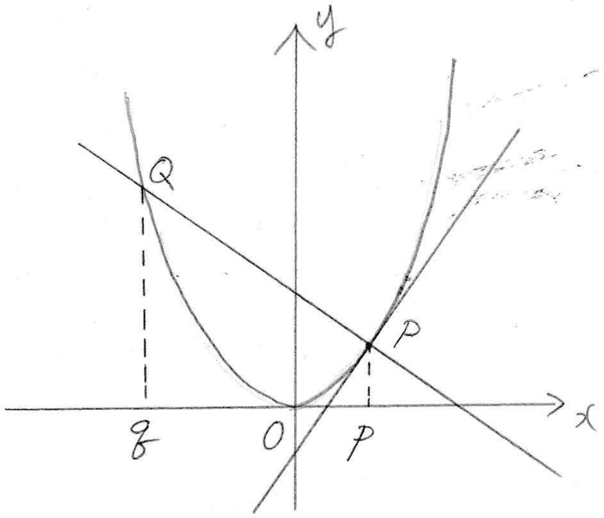
$$ax^2 = -\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2$$

$$ax^2 + \frac{1}{2ap}x - \frac{1}{2a} - ap^2 = 0$$

p, q は、この2次方程式の解と考えることができる。

「解と係数の関係」より

$$p + q = -\frac{\frac{1}{2ap}}{a}$$



$$p + q = -\frac{1}{2a^2p}$$

$$q = -\frac{1}{2a^2p} - p$$

[答] $q = -\frac{1}{2a^2p} - p$

<別解あり>

因数分解、解の公式でも回答可能。

(3) 点Pを$p>0$の範囲で動かす。$S(p)$が最小となるときの$S(p)$の値を求めよ。また、lの傾きを求めよ。

〈解説・解答〉

$S(p)$

$$= \int_q^p -\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2 - ax^2 \, dx$$

$$= -\int_q^p \left(ax^2 + \frac{1}{2ap}x - \frac{1}{2a} - ap^2\right) dx$$

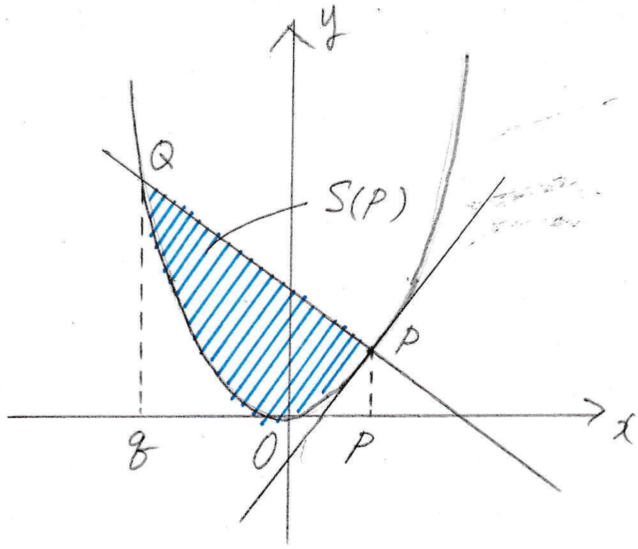
p、qは

$$ax^2 + \frac{1}{2ap}x - \frac{1}{2a} - ap^2 = 0$$

の解であることから、以下の公式を使うことができる。

$$\boxed{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

$$= -\int_q^p a(x-q)(x-p)\,dx$$



$$= -a\int_q^p (x-q)(x-p)\,dx$$

$$= -a \times \left\{-\frac{1}{6}(p-q)^3\right\}$$

$$= \frac{a}{6}(p-q)^3$$

(2)より $q = -\frac{1}{2a^2p} - p$ を代入

$$= \frac{a}{6}\left(p + \frac{1}{2a^2p} + p\right)^3$$

$$= \frac{a}{6}\left(2p + \frac{1}{2a^2p}\right)^3$$

↑

これはちょっと計算しづらい！

問題は「$S(p)$の最小値」を求めればよいから、別の公式を導き出したい！

$$= \frac{a}{6}\left(2p + \frac{1}{2a^2p}\right)^3$$

逆数のたし算 → 最小値

⇓

相加平均 ≧ 相乗平均

を利用しよう

相加平均 ≧ 相乗平均

$a>0$, $b>0$ より

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{a \cdot b}$$

等号成立時は $a=b$ のとき

$p>0$, $a>0$ より

$2p>0$, $\frac{1}{2a^2p}>0$.

相加平均≧相乗平均を適用して

$$2p + \frac{1}{2a^2p} \geqq 2\sqrt{2p \cdot \frac{1}{2a^2p}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{a^2}}$$

$a^2=|a|$

$$= 2\frac{1}{|a|}$$

$a>0$ より

$$2p + \frac{1}{2a^2p} \geqq \frac{2}{a}$$

よって、最小値は $\frac{2}{a}$

$\frac{a}{6}\left(2p + \frac{1}{2a^2p}\right)^3$ に代入

$$= \frac{a}{6} \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^3$$

$$= \frac{8a}{6a^3}$$

$$= \frac{4}{3a^2} \quad \cdots (答)$$

l の傾きを求める

最小値を示すのは

「等号成立時」である → $a=b$

つまり、

$$2p = \frac{1}{2a^2p}$$

$$4a^2p^2 = 1$$

$$a^2p^2 = \frac{1}{4}$$

$$ap = \pm\frac{1}{2}$$

$a>0,\ p>0$ より

$$ap=\frac{1}{2}$$

l は $y=-\frac{1}{2ap}x+\frac{1}{2a}+ap^2$

傾き

$$-\frac{1}{2ap}$$

$ap=\frac{1}{2}$ を代入

$$=-\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}$$

$$=\underline{\underline{-1}}$$

[答] $S(p)$ の最小値

$$\frac{4}{3a^2}$$

l の傾き -1