[問題] $a_1=3$,

$na_{n+1}=3(n+1)a_n+2n(n+1)$

$(n=1, 2, 3\cdots)$

(1) a_2, a_3 を求めよ。

〈解説・解答〉

Ⓐ a_2を求めよう

上記条件式に、$n=1$ を代入しよう.

$a_1=3$

$1\cdot a_{1+1}=3(1+1)a_1+2\cdot1(1+1)$

$a_2=3\cdot2\cdot3+2\cdot2$

$=18+4$

$=\underline{\underline{22}}\cdots$(答)

Ⓑ a_3を求めよう

$n=2$を求めよう.

$a_2=22$.

$2\cdot a_{2+1}=3\cdot(2+1)a_2+2\cdot2(2+1)$

$2a_3=3\cdot3\cdot22+4\cdot3$

$=198+12$

$=\underline{\underline{210}}\cdots$(答)

[答] $a_2=22$

$a_3=210$

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{n}$ と定めるとき、b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

＜解説・解答＞

$$n\,a_{n+1}=3(n+1)a_n+2n(n+1)$$

$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ となる。

$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ と表すことができる！

ここを変形して… に持って行くには…

与式の両辺を $n(n+1)$ で割る

$$\frac{\cancel{n}\,a_{n+1}}{\cancel{n}(n+1)}=\frac{3\cancel{(n+1)}a_n}{n\cancel{(n+1)}}+\frac{2\cancel{n}\cancel{(n+1)}}{\cancel{n}\cancel{(n+1)}}$$

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{n+1}}_{b_{n+1}}=3\cdot\underbrace{\frac{a_n}{n}}_{b_n}+2$$

b_{n+1} できた！

b_n

$\therefore\ b_{n+1}=3b_n+2$

$\boxed{[答]\ b_{n+1}=3b_n+2}$

(3) 一般項 a_n を求めよ。

＜解説・解答＞

$b_{n+1}=3b_n+2$ を利用する

$$b_{n+1}=3b_n+2$$

$$-)\quad \alpha=3\alpha+2$$

特性方程式！

$$b_{n+1}-\alpha=3(b_n-\alpha)$$

α を求めよう．

特性方程式を解く

$$\alpha=3\alpha+2$$

$$-2\alpha=2$$

$$\alpha=-1$$

代入

$$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$$

このことから

数列 $\{b_n+1\}$ は…

$a_1=3$

初項 $b_1+1=\frac{a_1}{1}+1=3+1=4$

公比 3

の等比数列である

$$\therefore\ b_n+1=4\cdot3^{n-1}$$

$$b_n=4\cdot3^{n-1}-1$$

$b_n=\frac{a_n}{n}$ より

$$\frac{a_n}{n}=4\cdot3^{n-1}-1$$

$$a_n=n(4\cdot3^{n-1}-1)$$

［答］$a_n=n(4\cdot3^{n-1}-1)$

$(a_n=4n3^{n-1}-n)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

＜解説・解答＞

$a_n = 4n3^{n-1} - n$

S₁とおく　　S₂とおく

$$\sum_{k=1}^{n}(4k3^{k-1} - k) = 4\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} k$$

（等差）×（等比）の解法を利用！

$$S_1 = 4\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^{k-1}$$

$$S_1 = 4(1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + \cdots + n\cdot 3^{n-1})$$

$$-)\ 3S_1 = 4(\quad 1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \cdots + (n-1)\cdot 3^{n-1} + n\cdot 3^n)$$

$$-2S_1 = 4(\underbrace{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}} - n\cdot 3^n)$$

初項 1，公比 3，項数 $n-1-0+1=n$ の等比数列の和

$$-2S_1 = 4\cdot\frac{1(3^n-1)}{3-1} - 4\cdot n\cdot 3^n$$

$$= 2\cdot(3^n-1) - 4n\cdot 3^n$$

$$-2S_1 = 2\cdot 3^n - 2 - 4n\cdot 3^n$$

$$S_1 = 2n\cdot 3^n - 3^n + 1$$

$$= \underline{(2n-1)3^n + 1}$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_1 + S_2 = \underline{\underline{(2n-1)3^n + 1 - \frac{1}{2}n(n+1)}} \cdots (答)$$

$$\boxed{[答]\ (2n-1)3^n + 1 - \frac{1}{2}n(n+1)}$$