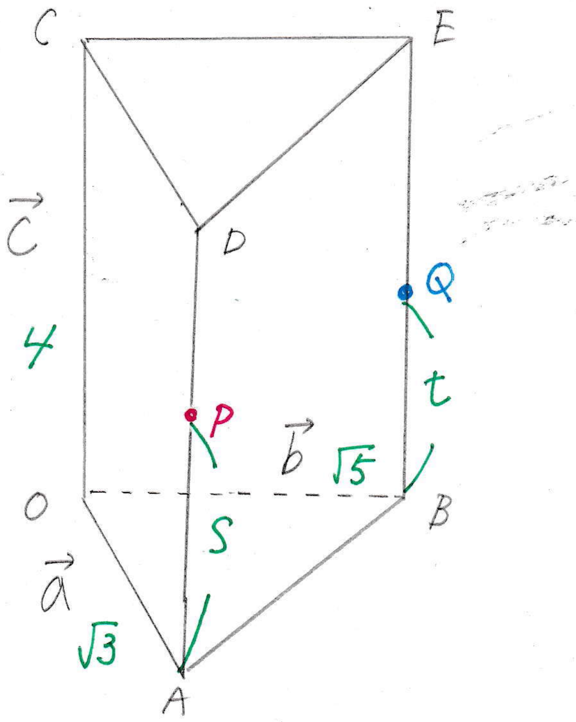
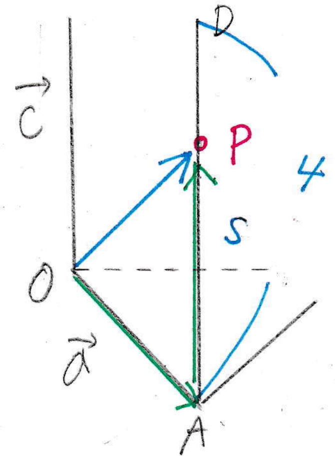
[問題] $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおき, $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=\sqrt{5}$, $|\vec{c}|=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ とする.
辺AD, BE上にそれぞれ点P, Qをとり, $AP=s$, $BQ=t$ とおく。

(1) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および s, t を用いて表せ。



<解説・解答>



$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$$

$$=\vec{a}+\frac{s}{4}\overrightarrow{AD}$$

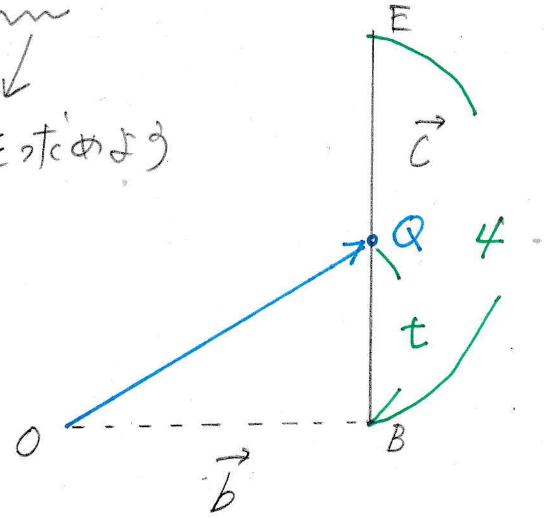
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OC}=\vec{c}$$

ベクトルは「向き」と「大きさ」が同じであれば、「位置」は関係なく、すべて同じベクトルとみなすことができる.

$$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+\frac{s}{4}\vec{c} \quad \cdots(\text{答})$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$

$\overrightarrow{OQ}$ をもとめよう



$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}$$

$$=\vec{b}+\frac{t}{4}\overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OC}=\vec{c}$$

$$=\vec{b}+\frac{t}{4}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$= \vec{b} + \frac{t}{4}\vec{c} - \left(\vec{a} + \frac{s}{4}\vec{c}\right)$$

$$= -\vec{a} + \vec{b} + \frac{t-s}{4}\vec{c} \quad \cdots (答)$$

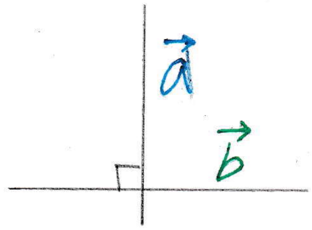
[答] $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \frac{s}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{OQ} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{t-s}{4}\vec{c}$

(2) OP⊥PQ となるとき t を s を用いて表せ。

<解説・解答>

ベクトルの垂直条件



$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

OP⊥PQ より

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$

$$\left(\vec{a} + \frac{s}{4}\vec{c}\right)\left(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{t-s}{4}\vec{c}\right) = 0$$

$$-\underbrace{|\vec{a}|^2}_{\sqrt{3}''} + \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{1''} + \frac{t-s}{4}\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{c}}_{0''}$$

$$-\frac{s}{4}\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{c}}_{0''} + \frac{s}{4}\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{c}}_{0''} + \frac{s(t-s)}{16}\underbrace{|\vec{c}|^2}_{4''} = 0$$

$$-3 + 1 + s(t-s) = 0$$

$$-s^2 + ts - 2 = 0$$

$$s^2 - ts + 2 = 0$$

$$ts = s^2 + 2$$

$tS = S^2 + 2$

大事な記述！

両辺を S で割る

① $S \neq 0$ のとき　② $S = 0$ のとき

① $S \neq 0$ のとき

$$t = \frac{S^2+2}{S}$$

または、$t = S + \frac{2}{S}$

② $S = 0$ のとき

$$t \times 0 = 0^2 + 2$$

$$0 = 2$$

等式が成り立たないので

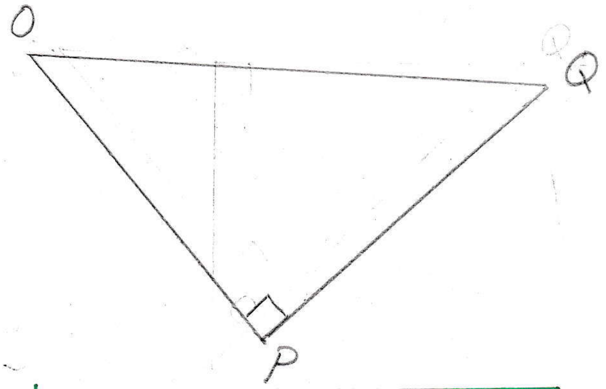
$S = 0$ は不適．

[答] $t = \dfrac{S^2+2}{S}$

$\left(t = S + \dfrac{2}{S}\right)$

(3) $\triangle OPQ$ が $OP = PQ$ の直角二等辺三角形となるように S, t の値を求めよ．

＜解説・解答＞



① $OP = PQ$

② $OP \perp PQ$

これらを立式しよう．

①

$$\vec{OP} = \vec{a} + \frac{S}{4}\vec{c}$$

$$|\vec{OP}|^2 = \left(\vec{a} + \frac{S}{4}\vec{c}\right)^2$$

$$= |\vec{a}|^2 + \frac{S}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} + \frac{S^2}{16}|\vec{c}|^2$$

$\sqrt{3}$　　　0　　　4

$$= 3 + S^2 \quad \cdots ①_A$$

$$\vec{PQ} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{t-S}{4}\vec{c}$$

$$|\vec{PQ}|^2 = \left(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{t-S}{4}\vec{c}\right)^2$$

$= (-\vec{a}+\vec{b})^2 + 2(-\vec{a}+\vec{b})\cdot\frac{t-s}{4}\vec{c}$

$+ \frac{(t-s)^2}{16}|\vec{c}|^2$

$= \underset{\sqrt{3}}{\underset{\uparrow}{|\vec{a}|^2}} - 2\underset{1}{\underset{\uparrow}{\vec{a}\cdot\vec{b}}} + \underset{\sqrt{5}}{\underset{\uparrow}{|\vec{b}|^2}} + \frac{t-s}{2}(-\underset{0}{\underset{\uparrow}{\vec{a}\cdot\vec{c}}}$

$+ \underset{0}{\underset{\uparrow}{\vec{b}\cdot\vec{c}}}) + \frac{(t-s)^2}{16}\underset{4}{\underset{\uparrow}{|\vec{c}|^2}}$

$= 3 - 2 + 5 + \frac{t-s}{2}\cdot 0 + (t-s)^2$

$= 6 + (t-s)^2$ …… ①B

$OP = PQ$

$3 + s^2 = 6 + (t-s)^2$

$3 + s^2 = 6 + t^2 - 2st + s^2$

$t^2 - 2st + 3 = 0$ …… ①

② $OP \perp PQ$ より

$\vec{OP}\cdot\vec{PQ} = 0$

(2)より $t = s + \frac{2}{s}$ …… ②

①に②を代入する。

$\left(s+\frac{2}{s}\right)^2 - 2s\left(s+\frac{2}{s}\right) + 3 = 0$

$s^2 + 4 + \frac{4}{s^2} - 2s^2 - 4 + 3 = 0$

$-s^2 + \frac{4}{s^2} + 3 = 0$

両辺に$-s^2$をかけて

$s^4 - 4 - 3s^2 = 0$

$s^4 - 3s^2 - 4 = 0$

$(s^2-4)(s^2+1) = 0$

$s^2 = 4$

$s = \pm 2$

$s > 0$ より $s = 2$

$t = s + \frac{2}{s}$ に代入

$= 3$

$\boxed{[答]\ s=2\quad t=3}$