[問題] aを正の実数とする。座標平面上に3点 $A(4,0)$ $B(-1,0)$ $C(0,-2)$をとり、$AP^2+BP^2-CP^2=a$を満たす点Pの表す図形Kを考える。

(1) Kの中心と半径を求めよ。

<解説・解答>

Kを表す式

$AP^2+BP^2-CP^2=a \cdots ①$

$P(x,y)$とおく

$AP^2=(x-4)^2+y^2 \quad A(4,0)$

$BP^2=(x+1)^2+y^2 \quad B(-1,0)$

$CP^2=x^2+(y+2)^2 \quad C(0,-2)$

①に代入

$$(x-4)^2+y^2+(x+1)^2+y^2-x^2-(y+2)^2=a$$

$$x^2-8x+16+y^2+x^2+2x+1+y^2-x^2-y^2-4y-4=a$$

$$x^2-6x+y^2-4y=a-13$$

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=a$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=a$$

中心$(3,2)$ 半径$\sqrt{a}$

[答] 中心$(3,2)$ 半径$\sqrt{a}$

(2) 点CがKの内部にあるときのaの値の範囲を求めよ。

＜解答・解説＞

Kの中心を$k(3, 2)$とする。

点$C(0, -2)$がKの内部にいるから…

(Kの半径) $> Ck$

が成り立てばよい。

Kの半径$=\sqrt{a}$

$$Ck=\sqrt{(3-0)^2+(2+2)^2}$$

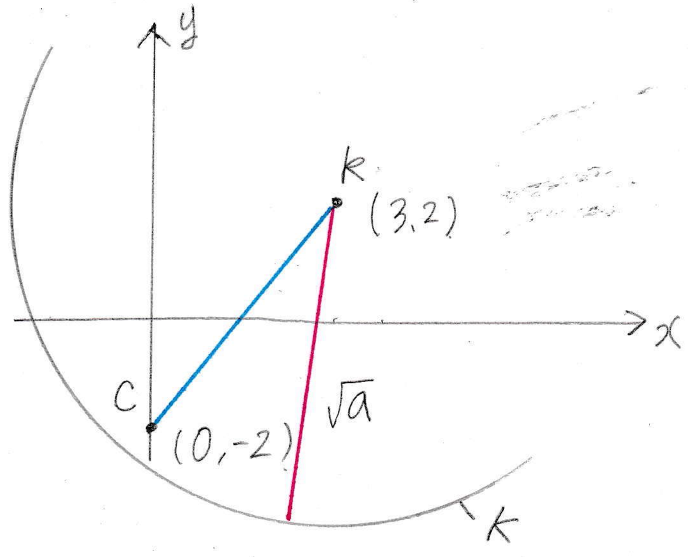
$$=\sqrt{25}$$

$$=5$$

$$\sqrt{a} > 5$$

$$\therefore a > 25$$

［答］ $a > 25$



(3) $AQ=BQ=CQ$を満たす点Qの座標を求めよ。また、円KがQを通るときのaの値を求めよ。

＜解説・解答＞

① $AQ=BQ$
② $AQ=CQ$
③ $BQ=CQ$

をそれぞれ立式する。

$Q(s, t)$とおく。

$A(4, 0)$ $B(-1, 0)$ $C(0, -2)$

$$AQ=\sqrt{(s-4)^2+t^2}$$

$$BQ=\sqrt{(s+1)^2+t^2}$$

$$CQ=\sqrt{s^2+(t+2)^2}$$

① AQ=BQ

$$\sqrt{(s-4)^2+t^2}=\sqrt{(s+1)^2+t^2}$$

$$s^2-8s+16+t^2=s^2+2s+1+t^2$$

$$10s=15$$

$$s=\frac{3}{2}$$

② AQ=CQ

$$\sqrt{(s-4)^2+t^2}=\sqrt{s^2+(t+2)^2}$$

$$s^2-8s+16+t^2=s^2+t^2+4t+4$$

$$8s+4t=12$$

$$2s+t=3$$

$$t=0$$

$$Q\left(\frac{3}{2},0\right)$$

次に、円Kが Qを通るときの
aの値を求める。

(1)より、Kは

$$(x-3)^2+(y-2)^2=a$$

$Q\left(\frac{3}{2},0\right)$を通るから、

$$\left(\frac{3}{2}-3\right)^2+(0-2)^2=a$$

$$\frac{9}{4}+4=a$$

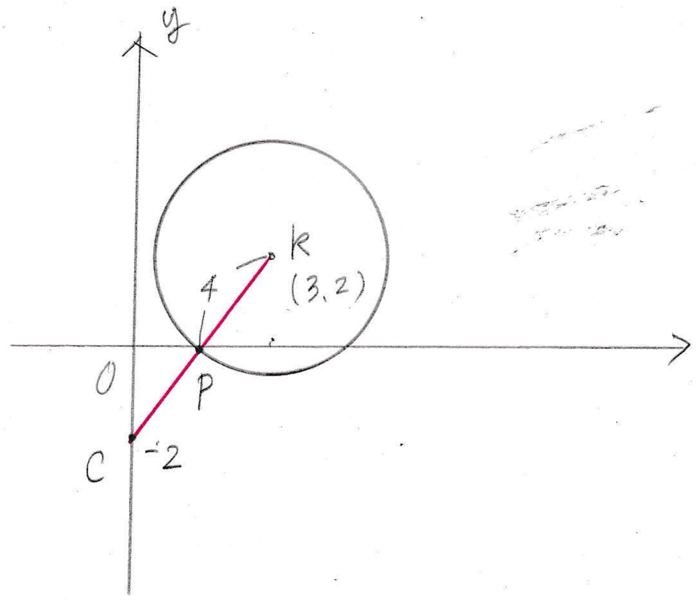
$$a=\frac{25}{4}$$

$$\boxed{\text{[答]}\ Q\left(\frac{3}{2},0\right)\quad a=\frac{25}{4}}$$

(4) $a=16$ とする。点 C と K 上の点 P との距離が最小になるときの P の座標を求めよ。

<解説・解答>

CP の距離が最短となるのは…
右上図のように「C, P, K が一直線上」にある。
⇒ 解法
直線 CK を求め、円 K との交点、P を求めればよい。



直線 CK
C (0, −2), K (3, 2)

$$y-(-2)=\frac{2-(-2)}{3-0}(x-0)$$

CK : $y=\frac{4}{3}x-2$

代入

K ; $(x-3)^2+(y-2)^2=16$

$$(x-3)^2+\left(\frac{4}{3}x-2-2\right)^2=16$$

$$(x-3)^2+\left(\frac{4}{3}x-4\right)^2=16$$

$$(x-3)^2+\frac{16}{9}(x-3)^2=16$$

$$\frac{25}{9}(x-3)^2=16$$

$$(x-3)^2=\frac{9\cdot16}{25}$$

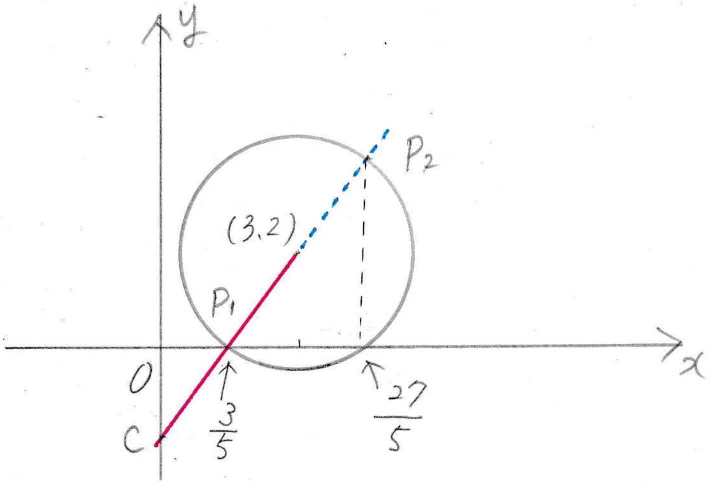
$$x-3=\pm\frac{3\cdot4}{5}$$

$$x-3=\pm\frac{12}{5}$$

$$x=3+\frac{12}{5},\quad x=3-\frac{12}{5}$$

$$=\frac{27}{5},\quad \frac{3}{5}$$

2個出てきたぞ!



直線CKと円Kとの交点のx座標だから…

CPが最小となるときのPは…

$x=\frac{3}{5}$ のとき

$y=\frac{4}{3}x-2$ に代入

$=\frac{4}{3}\times\frac{3}{5}-2$

$=-\frac{6}{5}$

$\therefore\ P\left(\frac{3}{5},-\frac{6}{5}\right)$

$\boxed{[答]\ P\left(\frac{3}{5},-\frac{6}{5}\right)}$