[問題] $a \neq 0$ として、次の2つの2次関数

$$y = ax^2 + 2ax + a + 6 \cdots ①$$

$$y = x^2 + bx + 2b - 6 \cdots ②$$

(1) ①のグラフの頂点は、($\boxed{アイ}$, $\boxed{ウ}$) である。

(2) ②のグラフを x 軸方向へ1、y 軸方向に p 平行移動したところ①のグラフに重なった。このとき、$a = \boxed{エ}$, $b = \boxed{オ}$, $p = \boxed{カ}$ である。

<解説・解答>

$$y = ax^2 + 2ax + a + 6$$

$$= a(x^2 + 2x) + a + 6$$

$$= a(x^2 + 2x + 1 - 1) + a + 6$$

$$= a(x+1)^2 - a + a + 6$$

$$= a(x+1)^2 + 6$$

頂点 $(-1, 6)$

[答] (ア,イ,ウ) −, 1, 6

<各2点>

<解説・解答>

②のグラフを

x 軸方向に 1

y 軸方向に p

平行移動しよう

$$y - p = (x-1)^2 + b(x-1) + 2b - 6$$

$$= x^2 - 2x + 1 + bx - b + 2b - 6$$

$$y = x^2 + (b-2)x + b - 5 + p$$

この式が①と一致するから

係数を比較し、

$$a = 1$$

$$2a = b - 2$$

$$a + 6 = b - 5 + p$$

$2 = b - 2$

$b = 4$

$1 + 6 = 4 - 5 + p$

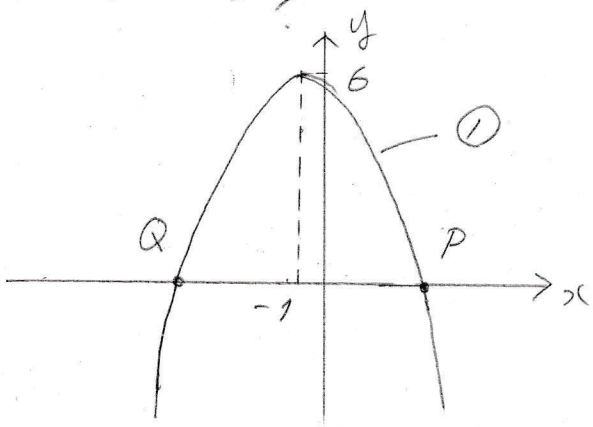
$p = 8$

[答] (エ, オ, カ) 1, 4, 8

<完答 3点>

(3) ①のグラフがx軸と2点P, Qで交わり、線分PQの長さが$2\sqrt{6}$になるのは$a = \boxed{キク}$のときである。

<解説・解答>



P, Qの座標を求めよう

$y = ax^2 + 2ax + a + 6$ ← ①

$y = 0$ ← x軸

この2つの交点を求める

$$ax^2 + 2ax + a + 6 = 0$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - a(a+6)}}{a}$$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - a^2 - 6a}}{a}$$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{-6a}}{a}$$

$P\left(\frac{-a+\sqrt{-6a}}{a}, 0\right)$

$Q\left(\frac{-a-\sqrt{-6a}}{a}, 0\right)$

PQの長さは…

$|P-Q|$

$= \left|\frac{-a+\sqrt{-6a}}{a} - \frac{-a-\sqrt{-6a}}{a}\right|$

$= \left|\frac{2\sqrt{-6a}}{a}\right|$

これが$2\sqrt{6}$になればよいから

$\left|\frac{2\sqrt{-6a}}{a}\right| = 2\sqrt{6}$

両辺を2乗して

$\frac{-24a}{a^2} = 24$

$\frac{-24}{a} = 24$

$24a = -24$

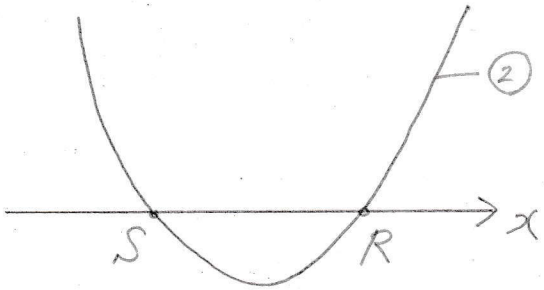
$a = -1$

[答] (キ, ク) −, 1

<完答 3点>

また、②のグラフとx軸との交点をR、Sとしたとき、線分RSの長さが$2\sqrt{6}$以下になるのは、$\boxed{ケ} \leqq b \leqq \boxed{コ}$のときである。

<解説・解答>



R、Sの座標を求めよう

$$y = x^2 + bx + 2b - 6$$
$$y = 0$$

$$x^2 + bx + 2b - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(2b-6)}}{2}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8b + 24}}{2}$$

$$R\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 8b + 24}}{2}, 0\right)$$

$$S\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 8b + 24}}{2}, 0\right)$$

RSの長さは

$$R - S$$

$$= \left| \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8b + 24}}{2} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 8b + 24}}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{2}\sqrt{b^2 - 8b + 24}}{\cancel{2}} \right|$$

$$= \left| \sqrt{b^2 - 8b + 24} \right|$$

正であるから

$$= \sqrt{b^2 - 8b + 24}$$

これが$2\sqrt{6}$以下となるには

$$\sqrt{b^2 - 8b + 24} \leqq 2\sqrt{6}$$

両辺とも正であるから、2乗しても不等号の向きは変わらない。

$$b^2 - 8b + 24 \leqq 24$$

$$b^2 - 8b \leqq 0$$

$$b(b - 8) \leqq 0$$

$$0 \leqq b \leqq 8$$

[答] (ケ,コ) 0, 8
<完答 3点>

RSの最小値は $\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}$ である。

<解説・解答>

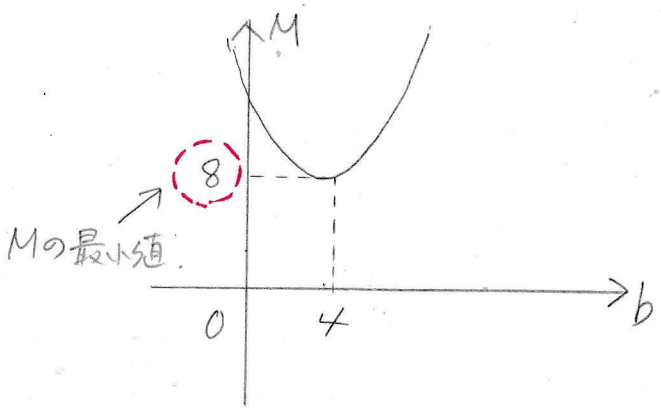
$RS=\sqrt{b^2-8b+24}$ である。

この最小値を求めるには、内を平方完成するとよい。

$=\sqrt{b^2-8b+16-16+24}$

$=\sqrt{(b-4)^2+8}$

$M=(b-4)^2+8$ とおくと、



Mの最小値は、$b=4$ のとき 8

$RS=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

[答] (サ,シ) 2, 2
<完答 4点>