[問題] 公差dの等差数列$\{a_n\}$の初項a_1から第n項までの和S_nを、定数p, q, rを用いて、$S_n=pn^2+qn+r$と表す。
このとき、$p=\frac{(ア)}{(イ)}d$、$r=(ウ)$である。

<解答、解説>

数列$\{a_n\}$の和、S_nの一般項を求めよう。

初項a_1、公差dの等差数列

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a_1+(n-1)d\}$$
$$=\frac{1}{2}n(2a_1+nd-d)$$
$$=na_1+\frac{1}{2}dn^2-\frac{1}{2}dn$$
$$=\frac{1}{2}dn^2+\left(a_1-\frac{1}{2}d\right)n$$

これが$S_n=pn^2+qn+r$と等しくなるから、

$p=\frac{1}{2}d$ …(答)

$a_1-\frac{1}{2}d=q$

$r=0$ …(答)

[答] (ア)(イ) 1, 2 (完答2点)
(ウ) 0 (2点)

特に、$p=2$, $q=3$となるのは、$a_1=(エ)$であり、一般項を求めると、$(オ)n+(カ)$である。

<解説、解答>

$$p=\frac{1}{2}d$$
$$a_1-\frac{1}{2}d=q$$

これらに$p=2$, $q=3$を代入する

$2=\frac{1}{2}d$ より

$d=4$

$a_1-\frac{1}{2}\cdot 4=3$

$a_1=3+2$

$a_1=5$ …(答)

$a_n=a_1+(n-1)d$ に代入し、

$=5+(n-1)\times 4$

$=5+4n-4$

$=4n+1$ …(答)

[答] (エ) 5 (2点)
(オ)(カ) 4, 1 (完答2点)

$b_n = a_1a_2,\ a_2a_3,\ a_3a_4,\ \cdots a_na_{n+1}$
とおいて $\sum_{k=1}^{n} b_k$ を求めよう。

〈解答・解説〉

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。

$a_n = 4n+1$ より

$b_n = 5\cdot 9,\ 9\cdot 13,\ 13\cdot 17,\ \cdots$
$\qquad (4n+1)\{4(n+1)+1\}$

$= 5\cdot 9,\ 9\cdot 13,\ \cdots,\ (4n+1)(4n+5)$

$b_n = (4n+1)(4n+5)$

$= 16n^2+24n+5$ …(答)

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} 16k^2+24k+5$$

$$= 16\sum_{k=1}^{n} k^2 + 24\sum_{k=1}^{n} k + 5\sum_{k=1}^{n}$$

$$= 16\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 24\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 5n$$

$$= \frac{8}{3}n(n+1)(2n+1) + 12n(n+1) + 5n$$

$$= \frac{1}{3}n\{8(n+1)(2n+1) + 36(n+1) + 5\}$$

$$= \frac{1}{3}n\{8(2n^2+3n+1) + 36(n+1) + 15\}$$

$$= \frac{n(16n^2+24n+8+36n+51)}{3}$$

$$= \frac{n(16n^2+60n+59)}{3}$$ …(答)

[答] (キ)(ク)(ケ)(コ)(サ) 1,6,2,4,5 (完答4点)
(シ)(ス)(セ)(ソ)(タ)(チ)(ツ) 1,6,6,0,5,9,3
(完答4点)

$T_n = a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_{n+1}$ を求めよう。

<解説・解答>

$a_n = (4n+1)(4n+5)$ より

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{a_1a_2},\ \frac{1}{a_2a_3},\ \frac{1}{a_3a_4},\ \cdots,\ \frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$$

と表すことができる。

「部分分数分解」の解法を利用しよう。

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\boxed{}}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}\right)$$

求めよう

$$\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}$$

$$= \frac{4n+5-(4n+1)}{(4n+1)(4n+5)}$$

$$= \frac{4}{(4n+1)(4n+5)}$$ より

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}\right)$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{5} - \cancel{\frac{1}{9}}\right)\right.$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{9}} - \cancel{\frac{1}{13}}\right)$$

$$\vdots$$

$$\left. + \left(\cancel{\frac{1}{4n+1}} - \frac{1}{4n+5}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4n+5}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4n+5-5}{5(4n+5)}$$

$$= \frac{n}{5(4n+5)} \cdots (答)$$

[答] (ア)(イ)(ウ) 5, 4, 5

(完答 4点)