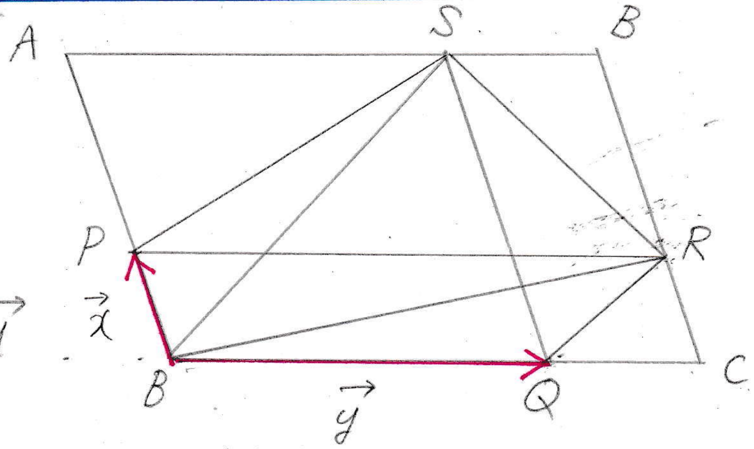
(1) 五角形PBQRSの辺RQ，SPおよび対角線SB，RBが表すベクトルは $\vec{x}$，$\vec{y}$ を用いて，

$\vec{RQ}=-\vec{x}-\frac{(ア)}{(イ)}\vec{y}$，$\vec{SP}=(ウエ)\vec{x}-\vec{y}$

$\vec{SB}=-((オ)+(カ))\vec{x}-\vec{y}$，$\vec{RB}=-\vec{x}-\left((キ)+\frac{(ク)}{(ケ)}\right)\vec{y}$ となる。

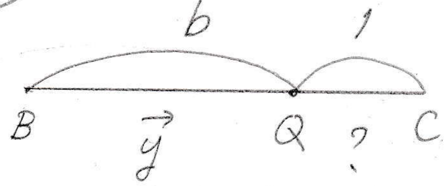


① $\vec{RQ}$ をもとめよう。

終点ベクトル − 始点ベクトル

$\vec{RQ}=\vec{CQ}-\vec{CR}$

$\vec{x}$



$\vec{CQ}:\vec{QB}=$

$\vec{CQ}:(-\vec{y})=1:b$

$b\vec{CQ}=-\vec{y}$

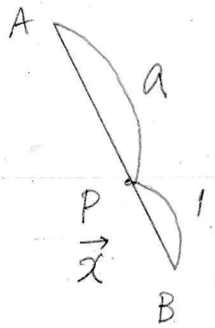
$\vec{CQ}=-\frac{1}{b}\vec{y}$

$\vec{RQ}=-\frac{1}{b}\vec{y}-\vec{x}=-\vec{x}-\frac{1}{b}\vec{y}$ …(答)$_1$

② $\vec{SP}$ をもとめよう。

$\vec{SP}=\vec{AP}-\vec{AS}$

$\vec{y}$

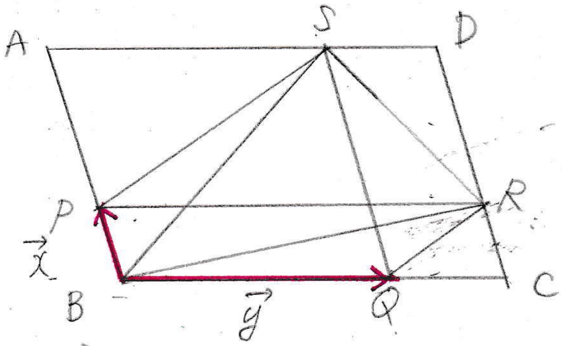


$\vec{AP}:\vec{PB}=\vec{AP}:(-\vec{x})=a:1$

$\vec{AP}=-a\vec{x}$

$\vec{SP}=-a\vec{x}-\vec{y}$ …(答)$_2$

③ $\overrightarrow{SB}$を求めよう。



$$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS}$$ $\vec{y}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}$$

$$= -a\vec{x} + (-\vec{x}) = -(a+1)\vec{x}$$

$$\overrightarrow{SB} = -(a+1)\vec{x} - \vec{y}$$ …(答)3

④ $\overrightarrow{RB}$を求めよう。

$$\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QB}$$ $-\vec{y}$

$$= -\vec{x} - \frac{1}{b}\vec{y} - \vec{y}$$

$$= -\vec{x} - \left(1 + \frac{1}{b}\right)\vec{y}$$ …(答)4

[答] (ア)(イ) 1, b (完答2点) (ウ)(エ) −, a (完答2点)
(オ)(カ) a, 1 (完答2点) (キ)(ク)(ケ) 1, 1, b (完答3点)

(2) $\overrightarrow{SP}\cdot\vec{x} = \vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\overrightarrow{RQ}$ が成り立つとする。

このとき、$\vec{x}\cdot\vec{y} = -\dfrac{(コ)}{(サ)}|\vec{x}|^2 = -\dfrac{1}{(シ)}|\vec{y}|^2$ である。

$$\overrightarrow{SP} = -a\vec{x} - \vec{y}$$

$$\overrightarrow{SP}\cdot\vec{x} = \vec{x}\cdot\vec{y}$$

$$(-a\vec{x} - \vec{y})\cdot\vec{x} = \vec{x}\cdot\vec{y}$$

$$-a|\vec{x}|^2 - \vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{y}$$

$$2\vec{x}\cdot\vec{y} = -a|\vec{x}|^2$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = -\frac{a}{2}|\vec{x}|^2$$ …(答)

$$\overrightarrow{RQ} = -\vec{x} - \frac{1}{b}\vec{y}$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\overrightarrow{RQ}$$

$$= \vec{y}\left(-\vec{x} - \frac{1}{b}\vec{y}\right)$$

$$= -\vec{x}\cdot\vec{y} - \frac{1}{b}|\vec{y}|^2$$

$$2\vec{x}\cdot\vec{y} = -\frac{1}{b}|\vec{y}|^2$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = -\frac{1}{2b}|\vec{y}|^2$$ …(答)

[答] (コ・サ) a, 2 (完答2点)

(シ・ス) 2, b (完答2点)

(3) RQ//SB および SP//RB が成り立つとする。このとき、

$$a=\frac{(セソ)+\sqrt{(タ)}}{(チ)},\quad b=\frac{(ツ)+\sqrt{(テ)}}{(ト)}$$

である。

<解説・解答>

RQ // SB より

$\overrightarrow{SB}=k\overrightarrow{RQ}$ が成り立つ。

(k は実数)

$$-(a+1)\vec{x}-\vec{y}=k\left(-\vec{x}-\frac{1}{b}\right)\vec{y}$$

$$-(a+1)\vec{x}-\vec{y}=-k\vec{x}-\frac{1}{b}k\vec{y}$$

$\vec{x}\neq\vec{0}$, $\vec{y}\neq\vec{0}$ であるから

係数を比較して 重要!!

$$\boxed{\begin{aligned}-(a+1)&=-k\\ -1&=-\frac{1}{b}k\end{aligned}}$$

k を消して a と b の関係式に持ち込もう

$$a+1=b \quad \cdots ①$$

SP // RB より

$$\overrightarrow{RB}=\ell\overrightarrow{SP}\quad (\ell \text{ は実数})$$

$$-\vec{x}-\left(1+\frac{1}{b}\right)\vec{y}=\ell\left(-a\vec{x}-\vec{y}\right)$$

$$=-a\ell\vec{x}-\ell\vec{y}$$

$\vec{x}\neq\vec{0}$, $\vec{y}\neq\vec{0}$ より

係数を比較して

$$\boxed{\begin{aligned}-1&=-a\ell\\ 1+\frac{1}{b}&=\ell\end{aligned}}$$

ℓ を消して a と b の関係式に持ち込む。

$$1=a+\frac{a}{b}\quad \cdots ②$$

① を ② に代入する

$$1=a+\frac{a}{a+1}$$

$$a+1=a(a+1)+a$$

$$a^2+a-1=0$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$a>0$ であるから

$$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$ → ②に代入し、

$$a+1=b.$$

$$b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

[答] (セ, ソ, タ, チ) −, 1, 5, 2
(完答 2点)

(ツ, テ, ト) 1, 5, 2.
(完答 2点)

(4) (2)と(3)が同時に成り立つとき、$\frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}=$ (ナ) であるから

$$\cos\angle PBQ=\frac{(ニ)-\sqrt{(ヌ)}}{(ネ)}$$ を得る。

<解説・解答>

(2)より

両辺に $-2b$ をかける

$$-\frac{a}{2}|\vec{x}|^2=-\frac{1}{2b}|\vec{y}|^2$$ より

$$ab|\vec{x}|^2=|\vec{y}|^2.$$

$|\vec{x}|^2$ で割る。

$|\vec{x}|^2\neq 0$ より

$$ab=\frac{|\vec{y}|^2}{|\vec{x}|^2}$$

$$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$ab=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{5-1}{4}$$

$$=1$$

$$\frac{|\vec{y}|^2}{|\vec{x}|^2} = 1$$

$$\therefore \frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|} = 1 \quad \cdots(答)$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\angle PBQ$$

$$\cos\angle PBQ = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = -\frac{a}{2}|\vec{x}|^2$$

$$\frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|} = 1 \text{ より } |\vec{y}| = |\vec{x}|$$

それぞれ代入

$$\cos\angle PBQ = \frac{-\frac{a}{2}|\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^2}$$

$$= -\frac{a}{2}$$

$a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ を代入し、

$$\frac{1-\sqrt{5}}{4} \quad \cdots(答)$$

［答］（ナ）1　（2点）

（ニ，ヌ，ネ）1，5，4