[問題] 2つの放物線 C_1: $y=\frac{1}{4}(x-1)^2$, $y=ax^2+b$ $(a\neq 0,\ a\neq\frac{1}{4})$ がある。C_1 と C_2 はただ1つの共有点を持つものとする。
(1) a と b の関係は ((ア) a − (イ), (ウ) b − (エ)) = 1 であり、共有点 P の座標は ((オ) − (カ) b, (キ) $b^{(ク)}$) である。
また、C_1, C_2 と y軸との交点をそれぞれ P, Q とすると、点 P の x 座標の絶対値は、QR の長さの (ケ) 倍である。

<解説・解答>

C_1 と C_2 は、ただ1つの共有点を持つことから…

C_1 : $y=\frac{1}{4}(x-1)^2$ ← yを消去して連立を解こう

C_2 ; $y=ax^2+b$

$$\frac{1}{4}(x-1)^2=ax^2+b$$

$$x^2-2x+1=4ax^2+4b$$

$$(4a-1)x^2+2x+4b-1=0 \quad \cdots ①$$

判別式 = 0 を立式しよう

$$\frac{D}{4}=1^2-(4a-1)(4b-1)=0$$

$$(4a-1)(4b-1)=1 \quad \cdots (答)$$

① の解 = P の x 座標である

$$(4a-1)x^2+2x+4b-1=0.$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{D}}{4a-1}$$

共有点が1つ = 解が1つ、であるから、

$D=0$ より

$$x=-\frac{1}{4a-1} \quad \cdots ②$$

$$(4a-1)(4b-1)=1$$

$a\neq\frac{1}{4}$ より $4a-1\neq 0$ だから

両辺を $4a-1$ で割る

$$4b-1=\frac{1}{4a-1} \quad \cdots ③$$

② に ③ を代入すると

$$x=1-4b$$

$y=\frac{1}{4}(x-1)^2$ に代入して y を求める

$= \frac{1}{4}\cdot(1-4b-1)^2$

$= 4b^2$

$\therefore$ $P(1-4b,\ 4b^2)$ …（答）

C_1: $y=\frac{1}{4}(x-1)^2 \longrightarrow Q(0, ?)$

C_2: $y=ax^2+b \longrightarrow R(0, ??)$

Qの座標は C_1より

$y=\frac{1}{4}(0-1)^2=\frac{1}{4}$

$Q\left(0, \frac{1}{4}\right)$

Rの座標は C_2より

$y=a\cdot 0^2+b=b$

$R(0, b)$

$QR=\left|\frac{1}{4}-b\right|$

点Pのx座標の絶対値は

$|1-4b|$ であるから

$=4\underbrace{\left|\frac{1}{4}-b\right|}_{QR}$

$=4QR$ である

$\therefore$ 4倍である …（答）

［答］（ア）（イ）（ウ）（エ）4, 1, 4, 1 ＜完答2点＞

（オ）（カ）1, 4 ＜完答2点＞

（キ）（ク）4, 2 ＜完答2点＞

（ケ）4 ＜2点＞

(2) PQ＝PRとなるとき、C_1は

$$y=\frac{(コ)}{(サシ)}x^2-\frac{(ス)}{(セ)}$$ である。

＜解説・解答＞

PQやPRを求めるのではなく、
二等辺三角形の性質を利用して、
工夫して計算しよう。

QRの中点が、Pのy座標となる

$$\left(\frac{1}{4}+b\right)\times\frac{1}{2}=4b^2$$

$$1+4b=32b^2$$

$$32b^2-4b-1=0$$

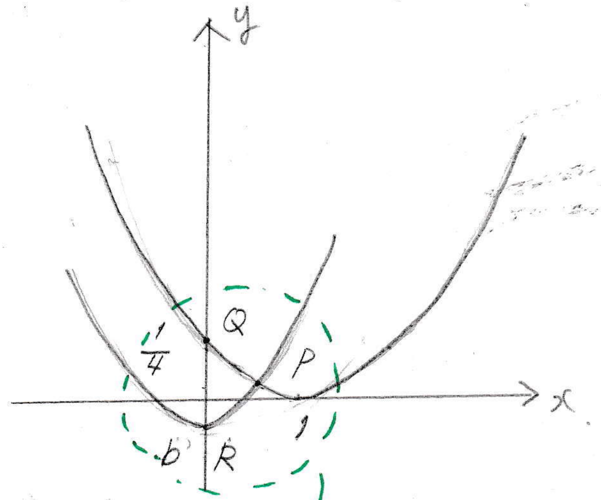
8	1	—	4
4	−1	—	−8
			−4

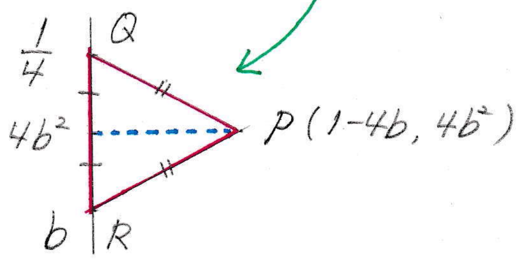
$$(8b+1)(4b-1)=0$$

$$b=-\frac{1}{8},\ \frac{1}{4}$$

$(4a-1)(4b-1)=1$ より、

$b\neq\frac{1}{4}$ であるから、 $b=-\frac{1}{8}$





$(4a-1)(4b-1)=1$ に

$b=-\frac{1}{8}$ を代入

$$(4a-1)\left(-\frac{1}{2}-1\right)=1$$

$$3(4a-1)=-2$$

$$12a-3=-2$$

$$a=\frac{1}{12}$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{8}$$

［答］ $y=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{8}$

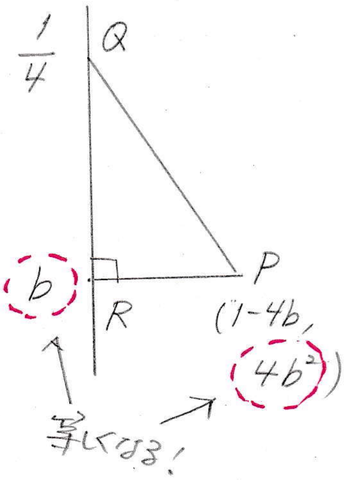
（コサシスセ）＜完答 3点＞

(3) △PQRが直角三角形になるときのC_2を求める。

＜解説・解答＞

① ∠R=90°のときを考えよう

RとPのy座標が等しくなる。



$$b=4b^2$$

$$4b^2-b=0$$

$$b(4b-1)=0$$

$$b=0,\ \frac{1}{4}$$

$b\neq\frac{1}{4}$より　$b=0$

$(4a-1)(4b-1)=1$に代入

$$(4a-1)(4\cdot 0-1)=1$$

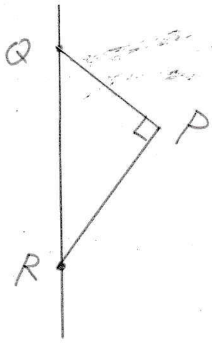
$$4a-1=-1$$

$$a=0$$

$a\neq 0$であることから不適。

② 次に∠P=90°を考えよう

右図を見てみよう



∠P=90°であることから、

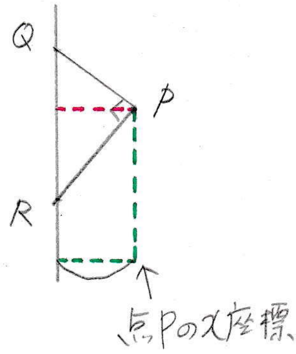
QRを直径とする円の

円周角、と考えることができる。

よって、P, Q, Rは同一円周上の点といえる。

この円をKとする。

このことから、次のことがわかるぞ！



円Kの半径を

$\frac{1}{2}QR$ とおくと

(点Pのx座標) $\leqq \frac{1}{2}QR$ …(答)

となる。

(1)で、

点Pのx座標の絶対値

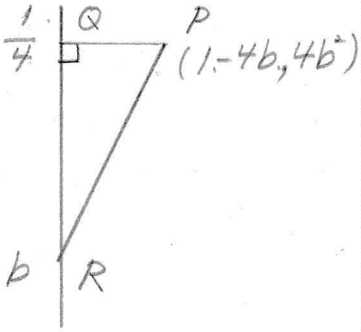
$= 4QR$

がわかっていることから、

∠P=90°は不適である。

③最後に $\angle Q = 90^\circ$ のときを考えよう

PとQのy座標が等しくなるから



$$\frac{1}{4} = 4b^2$$

$$b^2 = \frac{1}{16}$$

$$b = \pm\frac{1}{4}$$

$b \neq \frac{1}{4}$ より $b = -\frac{1}{4}$

代入

$$(4a-1)(4b-1) = 1$$

$$(4a-1) \times (-2) = 1$$

$$4a-1 = -\frac{1}{2}$$

$$4a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{8}$$

$\therefore\ y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}$ …(答)

[答] (ソ) 0 〈3点〉

(タチ) 1, 2 〈完答 3点〉

(ツテトナ) 1, 8, 1, 4 〈完答 3点〉