(1) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3\ (a>0)$ のとき、

$a+a^{-1}$ の値を求めよ。

また、$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+12}{a^2+a^{-2}+3}$ の値を求めよ。

〈解説・解答〉

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$ より

両辺を2乗する

$$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$=(a^{\frac{1}{2}})^2+2a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^2$$

$=a+2+a^{-1}$ であるから

$$a+a^{-1}$$

$$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2$$

$$=3^2-2$$

$=7$ …(答)

次に

$$\frac{\underbrace{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}}_{①}+12}{\underbrace{a^2+a^{-2}}_{②}+3}$$

① $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$

両辺を3乗する

$$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3$$

$$=(a^{\frac{1}{2}})^3+3(a^{\frac{1}{2}})^2a^{-\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}\cdot(a^{-\frac{1}{2}})^2+(a^{-\frac{1}{2}})^3$$

$$=a^{\frac{3}{2}}+3a\cdot a^{-\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}+a^{-\frac{3}{2}}$$

$$=a^{\frac{3}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}+3a^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$$

$$=a^{\frac{3}{2}}+3(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})+a^{-\frac{3}{2}}$$

より

$$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\underbrace{(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})}_{3}{}^3-3\underbrace{(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})}_{3}$$

$= 27 - 9$

$= 18$ …①

$a^2 + a^{-2}$

$= (a + a^{-1})^2 - 2$

$= 7^2 - 2$

$= 47$ …②

$(与式) = \dfrac{\underbrace{18}_{①} + 12}{\underbrace{47}_{②} + 3}$

$= \dfrac{30}{50}$

$= \dfrac{3}{5}$ …(答)

[答] $a + a^{-1} = 7$

$\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 12}{a^2 + a^{-2} + 3} = \dfrac{3}{5}$

(2) $a^{3x} - a^{-3x} = 6\sqrt{3}$ $(a > 0)$ のとき，

$a^x - a^{-x}$，$a^x + a^{-x}$，$a^{2x} - a^{-2x}$

の値を求めよ。

＜解説・解答＞

①

$(a^x - a^{-x})^3$

$= a^{3x} - 3a^{2x} \cdot a^{-x} + 3a^x \cdot a^{-2x} - a^{-3x}$

$= a^{3x} - 3a^x + 3a^{-x} - a^{-3x}$

$= a^{3x} - a^{-3x} - 3(a^x - a^{-x})$

$a^x - a^{-x} = M$ とおく

$M^3 = \underbrace{a^{3x} - a^{-3x}}_{6\sqrt{3}} - 3M$

$M^3 + 3M - 6\sqrt{3} = 0$

因数分解しよう

$f(M) = M^3 + 3M - 6\sqrt{3}$ とおく

$f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 0$ より

$\boxed{\sqrt{3}}$	1	0	3	$-6\sqrt{3}$
		$\sqrt{3}$	3	$6\sqrt{3}$
	1	$\sqrt{3}$	6	$\boxed{0}$

← 組み立て除法で！

$\therefore (M-\sqrt{3})(M^2+\sqrt{3}M+6)=0$

実数解なし

$M=\sqrt{3}$

$\therefore a^x-a^{-x}=\sqrt{3}$ …(答)

②

a^x+a^{-x} をっ求めよう

$(a^x+a^{-x})^2=a^{2x}+2+a^{-2x}$

また、

$(a^x-a^{-x})^2=a^{2x}-2+a^{-2x}$

より

$(a^x+a^{-x})^2=(a^x-a^{-x})^2+4$

$=\sqrt{3}^2+4$

$=7$

$a^x+a^{-x}=\pm\sqrt{7}$ $\quad a^x+a^{-x}>0$ より

$a^x+a^{-x}=\sqrt{7}$ …(答)

③

$a^{2x}-a^{-2x}=(a^x+a^{-x})(a^x-a^{-x})$

$=\sqrt{7}\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{21}$ …(答)

[答] $a^x-a^{-x}=\sqrt{3}$

$a^x+a^{-x}=\sqrt{7}$

$a^{2x}-a^{-2x}=\sqrt{21}$

(3) $x^c=10\ (x>0)$, $c=\log_{10}y$ $(y>0)$ のとき xy のとり得る値の範囲は、「$0<xy\leqq p\cdot 10^q$, または $xy\geqq r\cdot 10^s$」である。p, q, r, s を求めよ。

<解説・解答>

xy を求めよう。

$$\boxed{\begin{aligned} &x^c=10 \quad \cdots ① \\ &c=\log_{10}y \cdots ② \end{aligned}}$$

を変形し、xy を求めていこう。

① $x^c=10$

両辺を $\frac{1}{c}$ 乗する

$$(x^c)^{\frac{1}{c}}=10^{\frac{1}{c}}$$

$$x=10^{\frac{1}{c}} \quad \cdots ①$$

② $c=\log_{10}y$

$$y=10^c \quad \cdots ②$$

$$xy=10^{\frac{1}{c}}\cdot 10^c$$

$$=10^{c+\frac{1}{c}}$$

逆数の足し算 → 範囲を求める

<相加平均 ≧ 相乗平均>
を利用できる！

相加平均 ≧ 相乗平均

$a>0$, $b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{a\cdot b}$$

等号成立時は $a=b$ のとき

$c+\frac{1}{c}$ に同公式を利用でき

るが、問題が1つ！

$c>0$ が保証されていないこと！

⇓

重要！

① $c>0$　② $c<0$

に場合分けして解く！

重

($x^c=10$ より $c\neq 0$ である！)

① $c>0$ のとき

$\frac{1}{c}>0$ より 相加平均≧相乗平均

から

$$c+\frac{1}{c} \geqq 2\sqrt{c\cdot\frac{1}{c}}=2$$

$$c+\frac{1}{c} \geqq 2$$

底を10として指数をとると

$$10^{c+\frac{1}{c}} \geqq 10^{2}$$

$xy=10^{c+\frac{1}{c}}$ より

$$xy \geqq 10^{2}$$

$\therefore$ $r=1,\ s=2$ …(答)

② $c<0$ のとき $\frac{1}{c}<0$

$-c>0,\ -\frac{1}{c}>0$ より

同公式より

$$-\left(c+\frac{1}{c}\right) \geqq 2\sqrt{-c\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)}$$

$$=2$$

$$-\left(c+\frac{1}{c}\right) \geqq 2$$

$$c+\frac{1}{c} \leqq -2$$

底を10として指数をとると

$$10^{c+\frac{1}{c}} \leqq 10^{-2} \quad \cdots ②_A$$

$xy=10^{c+\frac{1}{c}}$ を代入

$$xy \leqq 10^{-2}$$

また $10^{c+\frac{1}{c}}>0$ であるから

$\cdots ②_B$

$②_{AB}$ より

$$0<\underbrace{10^{c+\frac{1}{c}}}_{= xy} \leqq 10^{-2}$$

$$0<xy \leqq 10^{-2}$$

$p=1,\ r=-2$ …(答)

[答] $p=1,\ r=-2,\ r=1,\ s=2$