[問題]（場合の数）

[1] YAMANAMIの8つの文字を横一列に並べる。

(1) Mが2つ続く並べ方は何通りあるか。

<解説・解答>

MM, Y, A, A, N, A, I

↑ 2つのMをカタマリとし、1つの文字として並べかえを計算するとよい

$$\frac{7!}{3!}$$

↑ 同じものを含む順列 Aが3つあるから

$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

$= 840$

[答] 840通り

(2) Aが2つ以上続く並べ方は何通りあるか。

<解説・解答>

① Aが3つ並ぶ組み合わせ

② Aが2つだけ並ぶ組み合わせ

に場合分けして計算する

① Aが3つ並ぶ組み合わせ

AAA, Y, M, N, M, I

↑ Aを1つの文字と考える

$$\frac{6!}{2!}$$

← Mが2つある

$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

$= 360$ 通り … ①

② Aが2つ並ぶ組み合わせ

A A, Y, A, M, N, M, I

Aを1つの文字と見るのは、今までと同じだが、もう1つのAと並んではいけない。

↓

2つの文字が隣り合わない並べかえの計算法

計算法

× Y × M × N × M × I ×

(1) Y, M, N, M, I の5つの文字を並べかえる計算する。

(2) 5つの文字の間（×）の6か所に A, A と A を入れる。

（このとき、"並べかえる"こと…つまり $_6C_2$ ではなく $_6P_2$ である）

(1) $\frac{5!}{2!}$ ← Mが2つある

$= 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ 通り

(2) $_6P_2 = 6 \cdot 5$

$= 30$ 通り

これらは同時に起こるから、積事象

60×30

$= 1800$ 通り …②

①と②は互いに排反だから

和事象

$360 + 1800$

$= 2160$ 通り

[答] 2160通り

(3) Aが2つ以上続き、かつMも2つ続く並べ方は何通りあるか。

<解説・解答>

Aが2つ以上続くのは…

① Aが3つ並ぶ組み合わせ

② Aが2つ並ぶ組み合わせ

の2通りある。

場合分けなし 1通り

このそれぞれで「Mが2つ続く」をカウントで計算すればよい

① Aが3つ並び、かつMも2つ続く組み合わせ

AAA MM Y, N, I

Aが3つを1つの文字に

Mが2つを1つの文字に

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$= 120$通り …①

② Aが2つだけ並び、かつMも2つ並ぶ組み合わせ

(あ)

× MM × Y × N × I ×

AA A

(い)

(あ) MM, Y, N, I の4つの文字を並びかえる

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$= 24$通り …(あ)

(い) 4つの文字の間の5か所にAAとAを入れて並べかえる

${}_5P_2 = 5 \cdot 4$

$= 20$通り …(い)

(あ)×(い) $= 24 \times 20$

$= 480$通り …②

①, ②は互いに排反だから

$120 + 480$

$= 600$ 通り

[答] 600通り

[2] <三角関数>

$y = 10\sin x\cos x + 2\sin x + 2\cos x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ とする。

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおいて y を t の式で表せ。

<解説、解答>

$y =$

$10\sin x\cos x + 2(\sin x + \cos x)$

$\Downarrow$

$(\underbrace{\sin x + \cos x}_{= t})^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より

$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

$2\sin x\cos x = t^2 - 1$

与式に代入

$y = 5\cdot(t^2 - 1) + 2t$

$= 5t^2 + 2t - 1$

[答] $y = 5t^2 + 2t - 1$

(2) tの値の範囲を求めよ。

<解説・解答>

$t = \sin x + \cos x$

合成しよう

$= \sqrt{1+1}\ \sin(x+\beta)$

$= \sqrt{2}\ \sin(x+\beta)$

βは $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

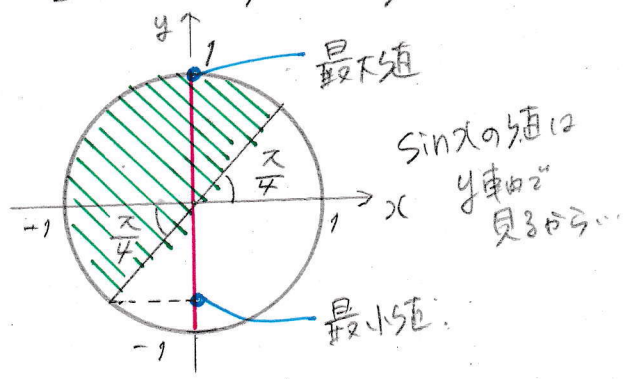
ともに満たす値 $\Rightarrow \frac{\pi}{4}$

$t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

この範囲を求めよう

$0 \leqq x \leqq \pi$ より

$\frac{\pi}{4} \leqq x + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$



$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$

$-1 \leqq \underbrace{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}_{= t} \leqq \sqrt{2}$

$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$

[答] $-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$

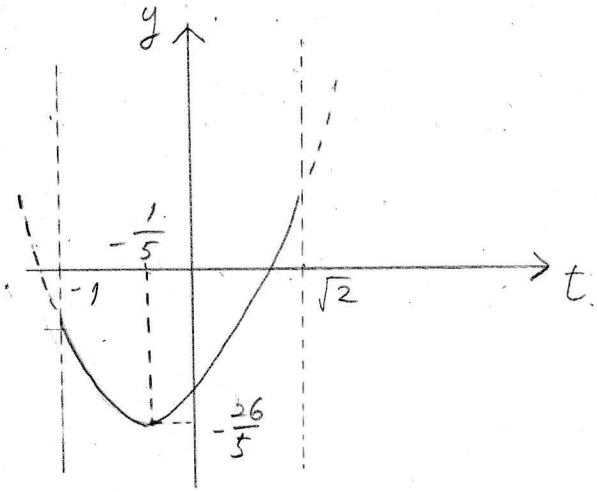
(3) yが最小となるxの値をαとするとき、$\cos\alpha$の値を求めよ。

<解説・解答>

$$y=5t^2+2t-1$$
$$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

$$y=5\left(t^2+\frac{2}{5}t\right)-1$$

$$=5\left(t+\frac{1}{5}\right)^2-\frac{26}{5}$$



$t=-\frac{1}{5}$のとき 最小値 $-\frac{26}{5}$

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{5}$$

↑

このxを解きたいが、この式はこれ以上は解くことができない。

ここで発想の転換!!

合成を元に戻す!

$$\sin x+\cos x=-\frac{1}{5}$$

このときのxをαとするから

$$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5} \quad \cdots ①$$

両辺を2乗しよう

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{25}$$

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25} \quad \cdots ②$$

① $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}$

② $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$

①を②に代入する

$$\sin\alpha=-\cos\alpha-\frac{1}{5}$$

$$\left(-\cos\alpha-\frac{1}{5}\right)\times\cos\alpha=-\frac{12}{25}$$

$$-\cos^2\alpha - \frac{1}{5}\cos\alpha + \frac{12}{25} = 0$$

$$25\cos^2\alpha + 5\cos\alpha - 12 = 0$$

$$(5\cos\alpha + 4)(5\cos\alpha - 3) = 0$$

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}$$

ここで $\sin\alpha$ について考える

α は x である。

$0 \leqq x \leqq \pi$ より

$0 \leqq \sin\alpha \leqq 1$ となる。

$$\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{12}{25} < 0$$

であるから $\cos\alpha < 0$。

$$\therefore \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

[答] $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$