[問題]

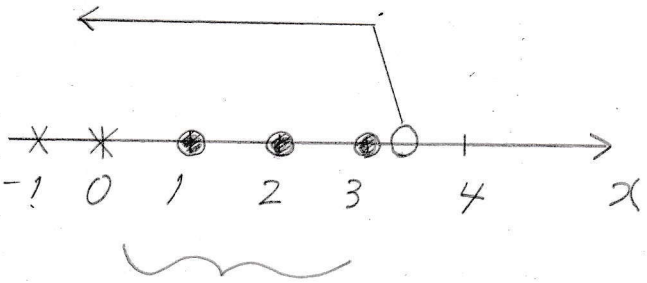
(1) $52-2x>4(8+x)$ を満たす x のうち、自然数の個数は $\boxed{}$ 個である。

<解説・解答>

$52-2x>32+4x$

$-6x>-20$

$x<\frac{10}{3}\ (3\frac{1}{3})$



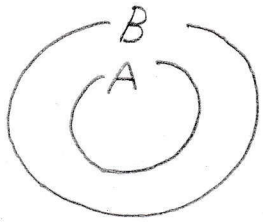
自然数は3つ！

[答] 3個

(2) 全体集合Uの部分集合A, Bについて、$A\subset B$ であるとき、$(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup B)$ を簡単な形で表すと $\boxed{}$ である。

<解説・解答>

$A\subset B$ であるから…



ベン図で表すと

$A\cup B=B$ になる

$\overline{A}\cup B=B$ になる

(与式) $=B\cap B$

$=B$

[答] B

(3) $x=2\sqrt{2}-3$ のとき、x^3+6x^2+9x-8 の値を求めると □ である。

<解説・解答>

~~直接代入~~ ← 絶対やめよう！

"次数下げ"のテクニックを利用しよう

$x=2\sqrt{2}-3$ ← √(ルート)を単独にして…

$x+3=2\sqrt{2}$ 両辺を2乗する

$x^2+6x+9=8$

$x^2+6x+1=0$ 移項！

$x^2=-6x-1$ 次数が下がった！

(左辺は2次→右辺は1次)

x^3+6x^2+9x-8 代入

$=x(-6x-1)+6\times(-6x-1)+9x-8$

$=-6x^2-x-36x-6+9x-8$

$=-6x^2-28x-14$ $(-6x-1)$

$=-6\times(-6x-1)-28x-14$

$=36x+6-28x-14$

$=8x-8$ $x=2\sqrt{2}-3$

$=8(2\sqrt{2}-3)-8$

$=16\sqrt{2}-24-8$

$=16\sqrt{2}-32$

[答] $16\sqrt{2}-32$

(4) $0<a<3$ のとき、

$3\sqrt{a^2}+2\sqrt{a^2+4a+4}-2\sqrt{a^2-6a+9}$

を簡単にすると $\boxed{}$ である。

<解説・解答>

$\sqrt{A^2}=|A|$ ← 絶対値を忘れずに!!

(与式)

$=3\sqrt{a^2}+2\sqrt{(a+2)^2}-2\sqrt{(a-3)^2}$

$=3\underbrace{|a|}_{①}+2\underbrace{|a+2|}_{②}-2\underbrace{|a-3|}_{③}$

① $|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

② $|a+2|=\begin{cases} a+2 & (a\geqq -2) \\ -a-2 & (a<-2) \end{cases}$

③ $|a-3|=\begin{cases} a-3 & (a\geqq 3) \\ -a+3 & (a<3) \end{cases}$

$=3a+2(a+2)-2(-a+3)$

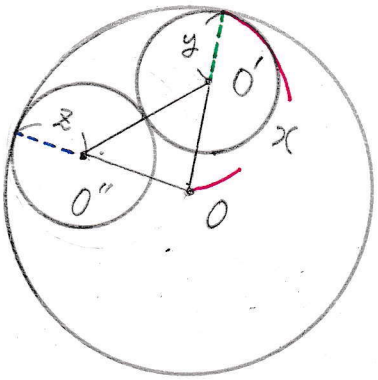
$=3a+2a+4+2a-6$

$=7a-2$

[答] $7a-2$

(5) 円Oに2つの円O′, O″が内接し, O′とO″は外接している。
$OO'=5$, $O'O''=7$, $OO''=6$ のとき, 円Oの半径を求めると □ である。

<解説・解答>



Oの半径をx, O′の半径をy, O″の半径をz とする

$y+z=O'O''=7$

$x-y=OO'=5$

$x-z=OO''=6$

となるから, これらを解くと…

$x=9$, $y=4$, $z=3$

[答] 9

(6) $x>0$ のもとで, $\left(x+\frac{4}{x}\right)\left(x+\frac{9}{x}\right)$ が最小値となるのは, $x=$ □ のときである。

<解説・解答>

<相加平均≧相乗平均>

$a>0$, $b>0$ のとき,

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

等号成立は $a=b$ のとき.

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\left(x+\frac{9}{x}\right)$$

$$=x^2+9+4+\frac{36}{x^2}$$

$$=x^2+\frac{36}{x^2}+13$$

公式を利用する

$x^2>0$, $\frac{36}{x^2}>0$

(相加平均≧相乗平均)

より

$$x^2+\frac{36}{x^2} \geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{36}{x^2}}$$

$$=2\sqrt{36}$$

$$=12$$

両辺に13を加えて、

$$x^2+\frac{36}{x^2}+13 \geqq 25$$

$$\parallel$$

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\left(x+\frac{9}{x}\right)$$

∴最小値は 25

等号成立時は、

$x^2=\frac{36}{x^2}$ のとき

$x^4=36$

$x^2=6$ ($x^2>0$より)

$x=\sqrt{6}$ ($x>0$より)

[答] $x=\sqrt{6}$

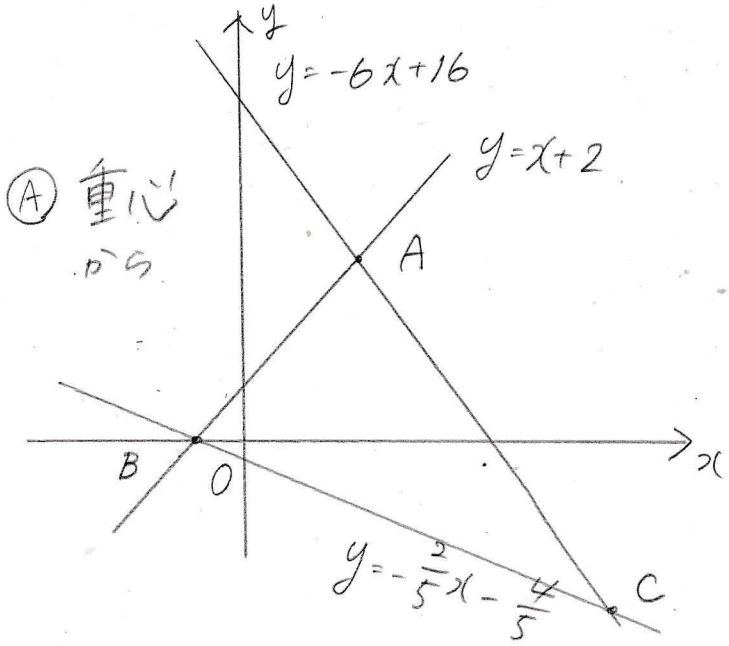
(7) $x-y+2=0$, $2x+5y+4=0$, $6x+y-16=0$ で囲まれる△ABCの重心の座標は□、外心の座標は□である。

<解説・解答>

$y=x+2$

$y=-\frac{2}{5}x-\frac{4}{5}$

$y=-6x+16$



Ⓐ 重心から

3つの交点の座標を求めよう

A (2, 4)

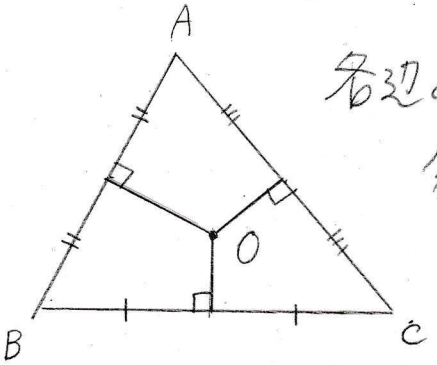
B (-2, 0)

C (3, -2)

$$\left(\frac{2-2+3}{3},\ \frac{4+0-2}{3}\right)$$

$$\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$$ …(答)

外心について



各辺の垂直二等分線の交点となる。

Ⓐ ABの垂直二等分線を求めよう

A(2, 4) B(−2, 0)

中点 $\left(\frac{2-2}{2},\ \frac{4+0}{2}\right)$

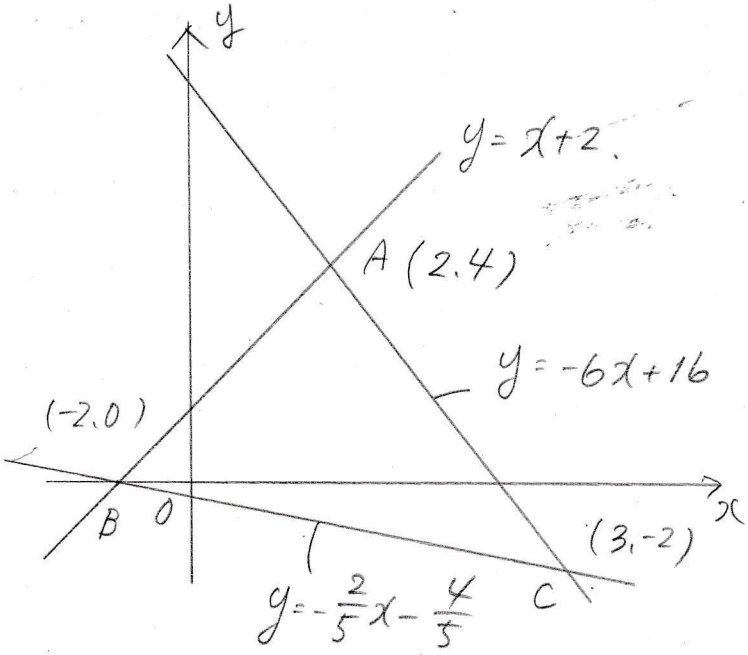
$=(0,\ 2)$

この点を通り $y=x+2$ の垂線

傾きを m とすると…

$1\cdot m=-1$ より

$m=-1$



$y=-x+b$

(0, 2)を通るから

$y=-x+2$ …①

Ⓑ ACの垂直二等分線を求めよう

A(2, 4) C(3, −2)

中点 $\left(\frac{2+3}{2},\ \frac{4-2}{2}\right)$

$=\left(\frac{5}{2},\ 1\right)$

この点を通り $y=-6x+16$ の垂線

傾きを n とすると

$-6n=-1$

$n=\frac{1}{6}$

$y = \frac{1}{6}x + C$

$\left(\frac{5}{2}, 1\right)$を通るから

$1 = \frac{1}{6} \times \frac{5}{2} + C$

$1 = \frac{5}{12} + C$

$C = \frac{7}{12}$

$y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{12}$ …②

①, ②の交点を求めると…

$-x + 2 = \frac{1}{6}x + \frac{7}{12}$

$-12x + 24 = 2x + 7$

$-14x = -17$

$x = \frac{17}{14}$

$y = -x + 2$

$= -\frac{17}{14} + 2$

$= \frac{11}{14}$

$\therefore \left(\frac{17}{14}, \frac{11}{14}\right)$ …(答)

[答] 重心 $\left(1, \frac{2}{3}\right)$

外心 $\left(\frac{17}{14}, \frac{11}{14}\right)$