[問題] 2次関数 $f(x)=2x^2-4ax+a+1$ について、次の問いに答えよ。ただし、aは定数とする。

(1) $0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最小値を m とするとき、m を a を用いて表せ。

＜解説・解答＞

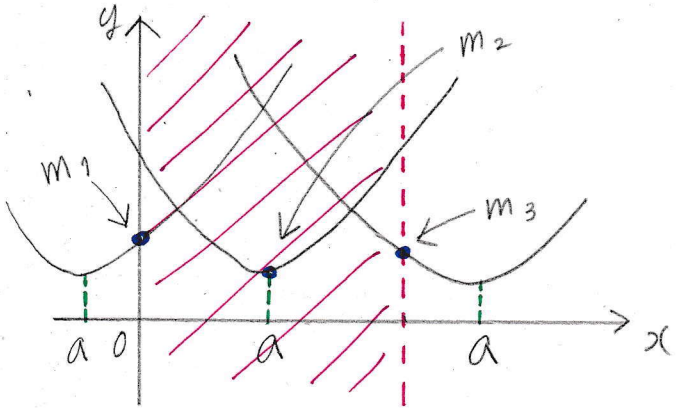
$$f(x)=2x^2-4ax+a+1$$

$$=2(x^2-2ax)+a+1$$

$$=2(x^2-2ax+a^2-a^2)+a+1$$

$$=2(x-a)^2-a^2+a+1$$

頂点 $(a,\ -a^2+a+1)$



aの範囲により、最小値(m)が異なる ⇒ 場合分け

Ⓐ $a<0$ のとき

$x=0$ のときが最小値

$m=f(0)=a+1$

Ⓑ $0 \leqq a < 4$ のとき

$x=a$ のときが最小値

$m=f(a)=-a^2+a+1$

Ⓒ $4 \leqq a$ のとき

$x=4$ のときが最小値

$m=f(4)=32-16a+a+1$

$=-15a+33$

[答] $a<0$ のとき

$m=a+1$

$0 \leqq a < 4$ のとき

$m=-a^2+a+1$

$4<a$ のとき

$m=-15a+33$

(2) $0 \leqq x \leqq 4$ において、つねに $f(x) > 0$ が成り立つように、a の値の範囲を求めよ。

<解説・解答>

解き方の考え方

$f(x) > 0 \Rightarrow$ 最小値 > 0

を立式すればよい。

最小値は(1)より

Ⓐ $a < 0$ のとき、$m = a + 1$

Ⓑ $0 \leqq a < 4$ のとき、$m = -a^2 + a + 1$

Ⓒ $4 < a$ のとき、$m = -15a + 33$

であった。

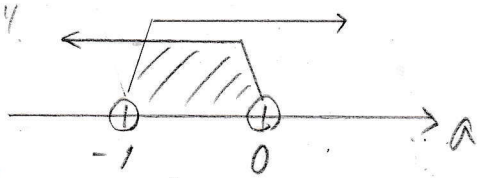
それぞれで $m > 0$ を立式し、a の値の範囲を求めればよい。

Ⓐ $a < 0$ のとき

$m = a + 1 > 0$

$a > -1$

$a < 0$ より



$\therefore -1 < a < 0$ …Ⓐ

Ⓑ $0 \leqq a < 4$ のとき

$m = -a^2 + a + 1 > 0$

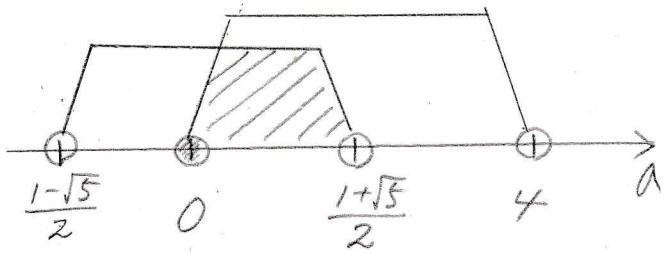
$a^2 - a - 1 < 0$

$a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ より

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < a < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$(\fallingdotseq -0.618)$ $(\fallingdotseq 1.618)$

$0 \leqq a < 4$ より



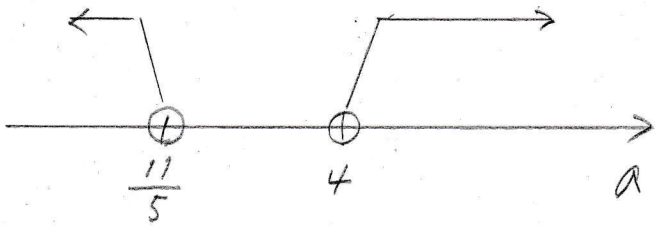
$\therefore 0 \leqq a < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ …Ⓑ

Ⓒ $4 < a$ のとき

$m = -15a + 33 > 0$

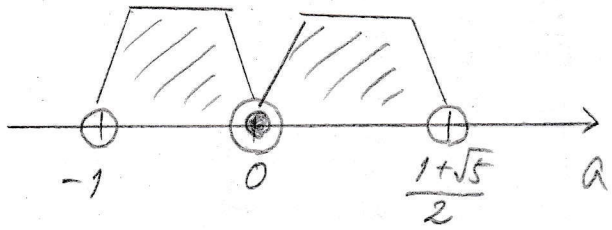
$a < \dfrac{11}{5}$

$4 < a$ より



∴ この範囲を満たすaの値はない…ⓒ

Ⓐ Ⓑ ⓒより



∴ $-1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

[答] $-1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(3) $f(x)=0$の異なる正の解の個数を求めよ。

<解説・解答>

$2x^2-4ax+a+1=0$

⇓

$y=2x^2-4ax+a+1$

$y=0$ ← x軸

との交点を求める式ととらえる。

$f(x)=0$の解

||

$y=2x^2-4ax+a+1$

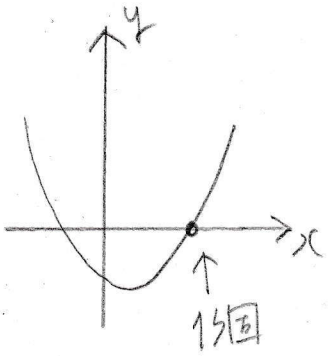
$y=0$ との交点

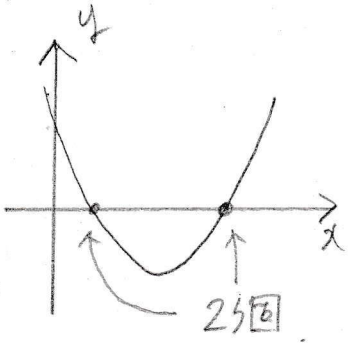
$f(x)=0$の正の解の個数

||

$y=2x^2-4ax+a+1$

が、x軸の正の部分と交わるときの交点の個数を求める





Ⓐ 交点を2つ持ち、2つとも正

Ⓑ 交点を2つ持ち、そのうち1つが正

Ⓒ 交点が1つで、交点が正

Ⓓ 交点はあるが、正の交点なし

Ⓔ 交点を持たない。(正の交点なし)

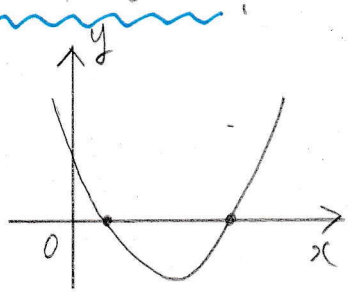
上記5つがある。それぞれ立式しよう

Ⓐ 交点を2つ持ち、2つとも正

① $D>0$

② 軸>0

③ $f(0)>0$



① $D>0$

$$\frac{D}{4}=4a^2-2(a+1)>0$$

$$2a^2-a-1>0$$

$$(2a+1)(a-1)>0$$

$$a<-\frac{1}{2},\ 1<a \quad \cdots ①$$

② 軸>0

軸 $x=a$ より

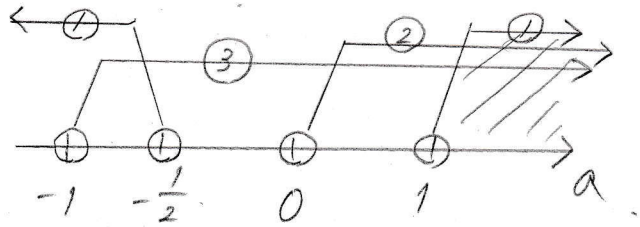
$$a>0 \quad \cdots ②$$

③ $f(0)>0$

$$f(0)=a+1>0$$

$$a>-1 \quad \cdots ③$$

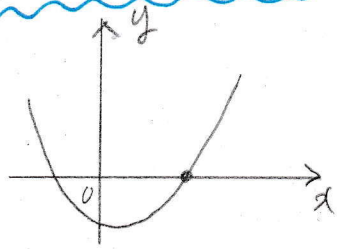
①, ②, ③より



∴ $a>1$ のとき 2個

Ⓑ 交点を2つ持ち、そのうち1つが正

・$f(0)<0$

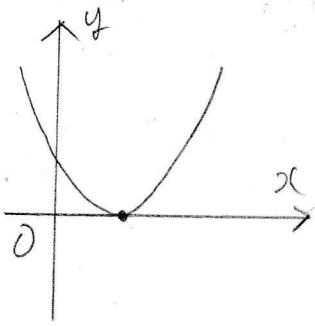


$$f(0)=a+1<0$$

∴ $a<-1$ のとき 1個

Ⓒ 交点が1つで、交点が正

① $D=0$
② 軸 >0



① $\frac{D}{4}=2a^2-a-1=0$

$(2a+1)(a-1)=0$

$a=-\frac{1}{2},\ 1$

② 軸 >0

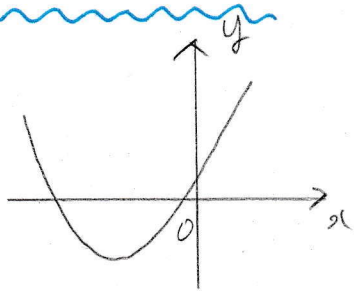
$a>0$

①, ② より $a=1$

∴ $a=1$ のとき 1個

Ⓓ 交点はあるが、正の交点なし

① $D\geqq 0$
② 軸 $\leqq 0$
③ $f(0)\geqq 0$



① $D\geqq 0$

$2a^2-a-1\geqq 0$

$(2a+1)(a-1)\geqq 0$

$a\leqq -\frac{1}{2},\ 1\leqq a$

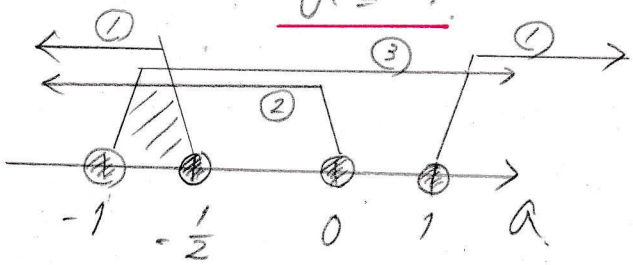
② 軸 $\leqq 0$

$a\leqq 0$

③ $f(0)\geqq 0$

$f(0)=a+1\geqq 0$

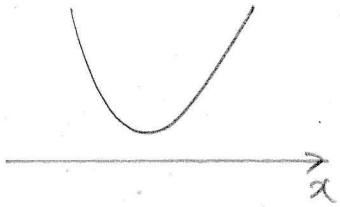
$a\geqq -1$



∴ $-1\leqq a\leqq -\frac{1}{2}$ のとき 0個

Ⓔ 交点を持たない

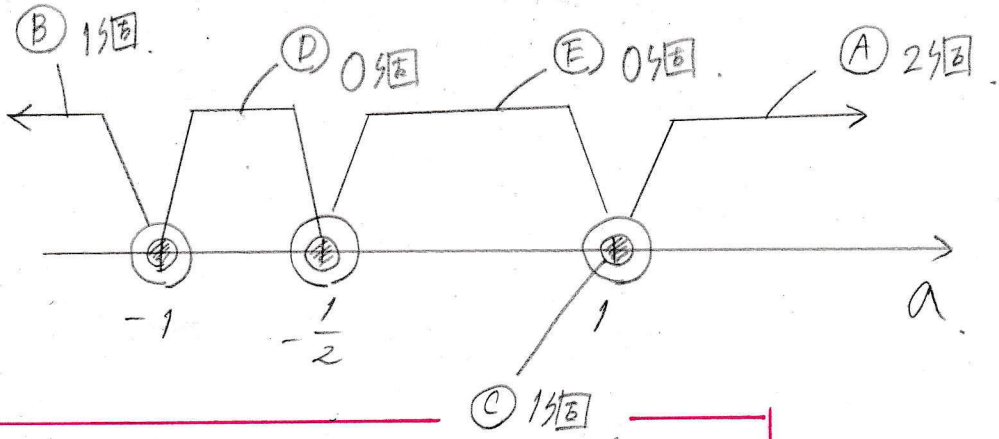
・$D<0$



$\frac{D}{4}=2a^2-a-1<0$

$(2a+1)(a-1)<0$

$-\frac{1}{2}<a<1$ のとき 0個



[答] $1<a$ のとき 2個

$a<-1$, $a=1$ のとき 1個

$-1\leqq a<1$ のとき 0個